4 **a** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

on $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

on $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$

et on $\forall x \in [0,1]$, $x^n \geq 0$

donc $0 \leq x^n \cdot \sqrt{1-x} \leq x^n$

les fonctions $x \mapsto x^n \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto x^n$

sont continues sur $[0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$